Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12
Blatt 1

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 Vektorräume (10 P)

Gegeben seien die Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren linear unabhängig sind und einen dreidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ aufspannen.

b) Finden Sie eine Orthonormalbasis dieses Raumes (normiert und orthogonal bzgl. des Skalarproduktes $\langle v, w\rangle = v^T w$) mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens.

Aufgabe 2 Skalarprodukte (10 P)

a) Seien f, g und h Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und

$$\langle f, g\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dr\, e^{-r^2} f^*(r) g(r)\,.$$

Zeigen Sie, dass $\langle ., .\rangle$ eine Sesquilinearform ist, d.h.

$$\langle f+g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle\,, \quad \langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle\,, \quad \langle \lambda f, g\rangle = \lambda^* \langle f, g\rangle\,, \quad \langle f, \lambda g\rangle = \lambda \langle f, g\rangle\,.$$

b) Betrachten Sie nun das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, $\langle v, w\rangle \equiv v^T w$, und die dazugehörige Norm $||v|| \equiv \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Zeigen Sie, dass die Norm und das Skalarprodukt unter Transformationen

$$v \to Rv\,, w \to Rw$$

mit einer Orthogonalen Matrix R invariant sind.

Aufgabe 3 Kontinuitätsgleichung (10 P)

Betrachten Sie Lösungen der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\,\psi\,.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte und Stromdichte sind gegeben durch

$$\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2\,, \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\right)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot j + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0$$

gilt.

b) Sei P die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen sich im Halbraum $r_1 > 0$ befindet. Drücken Sie P als Integral über ψ aus.

c) Drücken Sie dP/dt als Integral über $\vec{j}$ aus.