Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12
Blatt 3

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 Zustände präparieren und messen (10 P)

Wir betrachten ein physikalisches System mit einem komplex 3-dimensionalen Zustandsraum mit der Orthonormalbasis $|1\rangle \dots |3\rangle$. Zwei Observablen (selbstadjungierte Operatoren) seien in dieser Basis gegeben durch die Matrizen

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Sie besitzen eine Messvorrichtung, die wahlweise $\hat{A}$ oder $\hat{B}$ messen kann.

a) Welche möglichen Messwerte gibt es für $\hat{A}$ und $\hat{B}$?

b) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$. Sind die Observablen im Allgemeinen gleichzeitig bestimmbar?

c) Wie klein kann die Unschärfe $\Delta A \Delta B$ (abhängig vom Zustand des Systems) werden? Welcher Zustand minimiert sie?

d) Sie führen eine idealisierte Messung von $\hat{B}$ durch und messen das Ergebnis $B = 1$. In welchem Zustand befindet sich das System unmittelbar nach der Messung?

e) Sie führen unmittelbar nach dieser ersten Messung eine Messung der Observable $\hat{A}$ durch. Welche möglichen Messergebnisse können auftreten und mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?

f) *Bonusaufgabe:* Sie wollen das System, welches sich in einem unbekannten Zustand befindet, bis auf eine komplexe Phase in den Zustand $|2\rangle$ bringen ("präparieren"). Welche Abfolge von Messungen müssen Sie vornehmen um dies zu erreichen? Kann dieses Vorhaben endgültig scheitern?

Aufgabe 2 Zeitentwicklung und Eigenzustände (10 P)

Der Hamiltonoperator des physikalischen Systems aus Aufgabe 1 sei gegeben durch $\hat{H} = k\,\hbar\omega\hat{A}^2$. Sie können mit einem Schalter zu jeder Zeit $k = 0$ oder $k = 1$ einstellen (z.B. über ein äusseres Magnetfeld), ohne das System zu messen.

a) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi, t_0\rangle = a_1|1\rangle + a_2|2\rangle + a_3|3\rangle$ für konstantes $k = 0$ bzw. $k = 1$ anhand der Schrödinger-Gleichung für Zustandsvektoren

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi, t\rangle = \hat{H}|\psi, t\rangle\,.$$

b) Sie schalten $k = 0$ und führen eine Messung von $\hat{B}$ mit dem Ergebnis $B = 1$ durch. Wie lange müssen Sie $k = 1$ schalten, damit bei einer Folgemessung sicher das Ergebnis $B = -1$ auftritt?

Aufgabe 3 Unschärferelation und Gauss-Wellenpakete (10 P)

Gegeben sei die Wellenfunktion in einer Dimension

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{x^2}{2a}} ,$$

wobei $a > 0$.

a) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N so dass $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$.

b) Zeigen Sie, dass man den Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi|^2 dx$ aus $\partial N / \partial a$ erhalten kann.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{p} \rangle$.

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{x}^2 \rangle$ und $\langle \hat{p}^2 \rangle$.

e) Zeigen Sie, dass für diese Klasse von Wellenfunktionen die Orts-Impuls-Unschärfe minimal ist.