Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12
Blatt 10

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 HF-Theorem (5 P)

Wir betrachten einen Hamiltonoperator mit einem kontinuierlichen reellen Parameter λ und eine zugehörige Schar von normierten Eigenzuständen und Eigenwerten, so dass $\hat{H}(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda)|\psi(\lambda)\rangle$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle\psi(\lambda)| \left(\frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda}\right) |\psi(\lambda)\rangle \, .$$

Aufgabe 2 Störungstheorie in einem 2-Zustandsystem (8+7 P)

Betrachten Sie den Hamiltonoperator $H = H_0 + \lambda H_1$ für ein Zweizustandsystem mit

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -ia \\ ia & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenzustände von H in erster Ordnung und die Eigenwerte in zweiter Ordnung Störungstheorie.

b) Die exakten Eigenwerte und -zustände sind gegeben durch

$$E_\pm = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_2 - E_1)^2 + 4\lambda^2 a^2} \quad \psi_\pm = A_\pm \begin{pmatrix} -i\lambda a \\ E_1 - E_\pm \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit $A_\pm^{-1} = \sqrt{(E_1 - E_\pm)^2 + \lambda^2 a^2}$. Zeigen Sie, dass die Taylorentwicklung der exakten Lösung nach λ um 0 mit den in a) gefundenen Ergebnissen übereinstimmt.

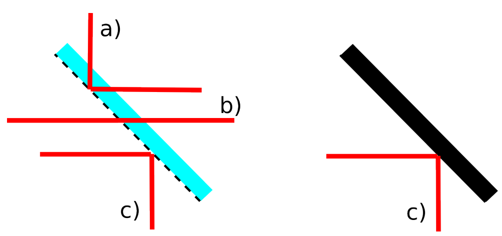

Abbildung 1: Halbdurchlässiger einseitig bedampfter (links) und herkömmlicher (rechts) Spiegel. Die Strahlen $a) - c)$ erfahren durch die Spiegel eine zusätzliche Phasenverschiebung von a) 2δ, b) δ, c) π, wobei $\delta > 0$ von der Spiegeldicke und Beschaffenheit abhängig ist. Die Durchlasswahrscheinlichkeit des einseitig bedampften Spiegels soll jeweils 50% sein, die des herkömmlichen Spiegels 0%.

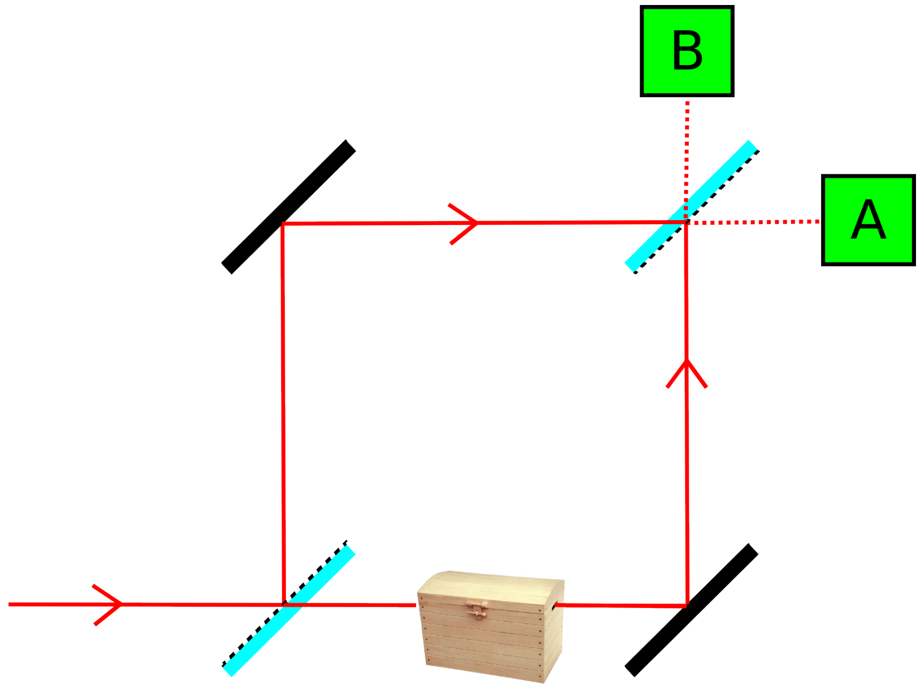

Abbildung 2: Der Versuchsaufbau in Form eines Mach-Zehnder-Interferometers mit der Kiste unbestimmten Inhalts in einem der Strahlwege. Die Wegstrecken zwischen den Spiegeln seien alle gleich lang. A und B sind Photondetektoren.

Aufgabe 3 Interferenz mit einem Vampir (3+2+3+2 P)

Sie bekommen eine Anzahl Kisten. In einigen von ihnen haben sich besonders lichtempfindliche Vampire versteckt, die sofort mit einem hörbaren Knall zu Staub verpuffen, falls sie von einem Photon getroffen werden. Die Aufgabe besteht darin, eine Kiste zu ermitteln, in der mit Sicherheit ein *unverletzter* Vampir sitzt.
Die Kisten besitzen jeweils zwei gegenüberliegende Öffnungen. Ist eine Kiste besetzt, werden in die Öffnung eintretende Photonen immer absorbiert und der Vampir verpufft. Ist sie leer, können die Photonen die Kiste ungehindert durchlaufen. Leere und besetzte Kisten sind ansonsten nicht unterscheidbar.
Man kann die Eigenheiten des quantenmechanischen Messprozesses nutzen, um *kontrafaktische Fragen* wie "was wäre passiert, wenn die Kiste von einem Photon getroffen worden wäre", experimentell zu beantworten. Betrachten Sie dazu den Versuchsaufbau in Abbildung 2.

a) Angenommen, die Kiste sei nicht besetzt. Zeigen Sie anhand der Informationen in Abbildung 1, dass Photonen, die in das Interferometer eingespeist werden, *immer* in Detektor A landen.

b) Angenommen, die Kiste sei besetzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Vampir verpuffen, wenn wir ein Photon in das Interferometer einspeisen?

c) Angenommen, die Kiste sei besetzt, wir speisen ein Photon ein, jedoch bleibt der Vampir dabei unverletzt. Was sind die Wahrscheinlichkeiten, dass das Photon in Detektor A bzw. Detektor B auftrifft?

d) Entwickeln Sie eine Strategie, um aus einer Anzahl von Kisten, die zur Hälfte besetzt sind, möglichst viele mit Sicherheit von *unverletzten* Vampiren besetzte Kisten zu gewinnen. Was ist der optimale Erwartungswert für den Anteil der so gefundenen Kisten? Wie groß ist die Gefahr, zu scheitern?