Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12
Blatt 5

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 Delta-Doppelmulde (10 P)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m welches sich im Potential $V(x) = -v\delta(x - d/2) - v\delta(x + d/2)$ bewegt. Wir wollen zunächst die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung lösen, um die Bindungszustände zu ermitteln.

a) Benutzen Sie den Ansatz
$$\psi(x) = a_1 e^{-b|x-d/2|} + a_2 e^{-b|x+d/2|} .$$
Argumentieren Sie, dass alle normierbaren Zustände mit $E < 0$ sich so schreiben lassen, und finden Sie Relationen, die die Koeffizienten a_1, a_2, b aufgrund der Anschlussbedingungen erfüllen müssen.

b) Zeigen Sie anhand dieser Relationen, dass $b = \frac{vm}{\hbar^2}(1 \pm e^{-bd})$ gilt. Wann gibt es zwei Bindungszustände, wann einen?

c) Berechnen Sie die Energien der gebundenen Zustände (*Hinweis*: betrachten Sie $x \neq \pm d/2$) und zeigen Sie, dass die Energien für $d \to \infty$ entarten. Vergleichen Sie mit der einfachen Delta-Potentialmulde. Was ist die physikalische Intuition hinter dieser Entartung?

d) Zeigen Sie, dass im Falle zweier Bindungszustände $|E_1\rangle$ und $|E_2\rangle$ beide auch Eigenzustände gegensätzlicher Parität des Paritätsoperators sind, und skizzieren Sie die (reell gewählten) Wellenfunktionen $\psi_{1,2}(x)$. Welcher Paritätszustand verschwindet für kleine d und warum?

e) Betrachten Sie die Zeitentwicklung des Zustands $|\psi\rangle = |E_1\rangle + |E_2\rangle$. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$.

Aufgabe 2 Energieabschätzungen und Potentiale (10 P)

a) Sei λ der kleinste Eigenwert der Observablen $\hat{A}$. Argumentieren Sie, dass für beliebige normierte Zustände $|\psi\rangle$ gilt dass $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \geq \lambda$.

b) Zeigen Sie, dass die Energie-Eigenwerte eines Teilchens in der 3-dim. Delta-Potentialmulde,
$$V(\vec{x}) = -c\,\delta^3(\vec{x})$$
nicht nach unten beschränkt sind. Betrachten Sie dazu Wellenfunktionen der Form
$$\psi_\sigma(\vec{x}) = \frac{1}{N^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^2/\sigma^2} ,$$
finden Sie den Normierungsfaktor und berechnen Sie den Erwartungswert von $\langle\psi_\sigma|\hat{H}|\psi_\sigma\rangle$.

c) Betrachten Sie nun ein Elektron im Coulomb-Potential $V(\vec{x}) = \dfrac{-e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|}$ und minimieren Sie $\langle\psi_\sigma|\hat{H}|\psi_\sigma\rangle$ als Funktion von σ. Vergleichen Sie E_{min} mit der Rydberg-Energie. Wovon hängt die Güte dieser Abschätzung ab? *Hinweis:* Arbeiten Sie in Kugelkoordinaten.

d) Gegeben sei die einfache Delta-Potentialmulde in einer Dimension, $V = -c\delta(x)$. Ein Teilchen sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $\psi(x) \sim e^{-x^2/(2\sigma^2)}$. Skizzieren Sie die Verteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit für $t = 0 \ldots \infty$.

Aufgabe 3 Starrer Rotor in 2D (10 P)

Die Heisenberg-Vertauschungsrelationen können nicht nur für kartesische Orts- und Impulsvariablen gefordert werden, sondern auch für andere kanonisch konjugierte Variablen eines Hamilton-Systems.

a) Ein klassischer starrer (ohne Biege- oder Streckschwingungen) Rotor in zwei Dimensionen mit Winkelvariable Θ hat in seinem Ruhesystem die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}J\dot{\Theta}^2$. Schreiben Sie die Lagrangefunktion $L(\Theta, \dot{\Theta})$ und berechnen Sie den dem Winkel Θ zugeordneten kanonischen Impuls Π als Funktion von Θ und $\dot{\Theta}$. Finden Sie die Hamiltonfunktion $H(\Theta, \Pi)$.

b) Befördern Sie die konjugierten Variablen zu Operatoren und fordern Sie Vertauschungsrelationen $[\hat{\Theta}, \hat{\Pi}] = i\hbar$ (vgl. $\hat{x}$ und $\hat{p}$). Verifizieren Sie dass $[\hat{H}, \hat{\Pi}] = 0$ (phys. Interpretation!).

c) Finden Sie in Analogie zu $\hat{x}$ und $\hat{p}$ eine Darstellung der Operatoren $\hat{\Theta}$ und $\hat{\Pi}$ auf Wellenfunktionen $\Psi(\Theta)$, welche diese Vertauschungsrelationen erfüllt.

d) Finden Sie die Eigenfunktionen von $\hat{\Pi}$ in dieser Darstellung. Beachten Sie dabei, dass die Winkel Θ und $\Theta + 2\pi$ physikalisch äquivalent sind. Was sind die Eigenwerte von $\hat{\Pi}$? Sind diese Eigenzustände gleichzeitig Energie-Eigenzustände? Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Θ für diese Eigenzustände?

e) Finden Sie ein komplexes Skalarprodukt, unter dem die Eigenfunktionen normierbar und paarweise orthogonal sind. Drücken Sie eine beliebige Zustandswellenfunktion $\Psi(\Theta)$ durch diese Eigenfunktionen aus.

f) *Bonus:* Sei $|l\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{\Pi}$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle l|[\hat{\Theta}, \hat{\Pi}]|l\rangle$ – einmal, indem Sie die Vertauschungsrelation einsetzen, dann, indem Sie den Kommutator explizit ausschreiben und $\hat{\Pi}$ zuerst auf die Zustände wirken lassen. Sind die beiden Ergebnisse konsistent? Worin liegt das Problem? Wiederholen Sie die Untersuchung für $\langle l|[\sin\hat{\Theta}, \Pi]|l\rangle$ oder $\langle l|[\cos\hat{\Theta}, \Pi]|l\rangle$. Worin liegt der qualitative Unterschied zwischen den Operatoren $\hat{\Theta}$ und $\sin\hat{\Theta}$, $\cos\hat{\Theta}$?