Theoretische Physik IV: Statistische Mechanik und Thermodynamik

2. Übungsblatt

Abgabedatum: Freitag, 2.5.08 in den Übungen

Aufgabe 2.1 *(Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen)* **(10 Punkte)**

(a) Die Poisson-Verteilung ist für $k = 0, 1, \ldots$ definiert durch

$$P_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \lambda > 0$$

Zeige, dass P_λ normiert ist und bestimme den Erwartungswert von k bezüglich der Poissonverteilung. (5 Punkte)

(b) Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2. Es gilt:

$$P(X_1 = x_1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!} \quad x_1 = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P(X_2 = k | X_1 = x_1) = \binom{x_1}{k} p^k (1-p)^{x_1 - k} \quad k = 0, 1, \ldots, x_1$$

Zeige, dass $P(X_2 = k) = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}$ (5 Punkte)

Aufgabe 2.2 *(Maxwellverteilung)* **(10 Punkte)**

Die Geschwindigkeitsverteilung der Atome eines klassischen idealen Gases ist durch folgende Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben:

$$f(\vec{v}) = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{m\vec{v}^2}{2k_B T}\right)$$

(a) Berechne die Normierungskonstante. (2 Punkte)

(b) Berechne die Mittelwerte $\langle v_x^2 \rangle$ und $\langle \vec{v}^2 \rangle$. (4 Punkte)

(c) Wie groß ist die mittlere Energie eines Atoms? (1 Punkt)

(d) Bestimme die Wahrscheinlichkeit $\rho(E)dE$ dafür, ein Atom im Energieintervall $[E, E + dE]$ zu finden. (3 Punkte)

Aufgabe 2.3 *(Optimierte Gaussverteilungen)* **(10 Punkte)**

Gegeben seien N unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen $r_1, \dots, r_N$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte jedes einzelnen r_i sei $p_1(r)$. Die zugehörige Verteilungsfunktion ist $F_1(r) = \int_{-\infty}^{r} p_1(\tilde{r}) d\tilde{r}$. Wir wollen nun folgende Zufallsvariable betrachten

$$X = \max\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$$

welche den größten Wert der N Zufallsvariablen r_i darstellt.

(a) Berechne die Verteilungsfunktion $F_N(x)$ der Zufallsvariable X in Abhängigkeit von $F_1(r)$. (2 Punkte)

(b) Zeige, dass der wahrscheinlichste Wert x^* der Zufallsvariable X für $N \gg 1$ gegeben ist durch die Gleichung

$$p_1'(x^*) + N p_1(x^*)^2 = 0$$

(4 Punkte)

(c) In der Physik kommen oft Verteilungen vor, die für große Werte schneller als ein Potenzgesetz abfallen. Betrachte eine Verteilungsfunktion der r_i, bei der für große r gilt: $\bar{F}_1(r) = 1 - F_1(r) \simeq c \exp\left(-(r/a)^p\right)$. Berechne x^* für $N \gg 1$. (4 Punkte)

Bonusaufgabe 2.4 *(Gammaverteilung)* **(10 Extrapunkte)**

Hinweis: Diese Aufgabe kann freiwillig gelöst werden, um den Punktestand aufzubessern.

Die Gammaverteilung ist definiert als

$$f(x, k, b) = \frac{1}{b^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/b} \quad x > 0, \quad k > 0, \quad b > 0$$

wobei $\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt$ die Gammafunktion ist.

(a) k ist ein Parameter, der die Form der Verteilung bestimmt. Zeichne die Dichtefunktion $f(x, k, b)$ für $b = 1$ und $k = 0.5, 1$ und 2 (z.B. mit gnuplot, maple oder per Hand). Wie ändert sich die Verteilung? (2 Punkte)

(b) b ist ein Skalenparameter. Was passiert mit der Verteilung, wenn k konstant ist und b sich ändert? Zeichne die Funktion f für ein $k > 1$ und drei verschiedene Werte von b. (2 Punkte)

(c) Berechne die Momenterzeugende Funktion, welche definiert ist durch $M(t) = \left\langle e^{tx} \right\rangle$. (3 Punkte)

(d) Berechne mit Hilfe der Momenterzeugenden Funktion $M(t)$ den Mittelwert $\langle x \rangle$ und die Varianz σ^2 der Verteilung. (3 Punkte)