# Theoretische Physik IV: Statistische Mechanik und Thermodynamik

## 3. Übungsblatt

**Abgabedatum:** Freitag, 9.5.08 in den Übungen

---

**Aufgabe 3.1** *(Benötigte Mathematik: Stirling-Formel)* **(10 Punkte)**

Die Stirling-Formel wird in der Statistischen Physik oft benötigt (siehe nächste Aufgabe), da man es in der Kombinatorik häufig mit Fakultäten zu tun hat. Leite die Stirling-Formel

$$\ln(n!) \approx (n + \frac{1}{2}) \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi)$$

her:

**(a)** Berechne zunächst

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^n$$

Dabei sei $n \geq 0$ eine ganze Zahl. (3 Punkte)

**(b)** Entwickle dann den natürlichen Logarithmus des Integranden um die Stelle seines Maximums und betrachte das Ergebnis für große $n$. Warum ist es zweckmäßig, hier den Logarithmus des Integranden anstelle des Integranden selbst zu entwickeln? (4 Punkte)

**(c)** Bestimme den ersten Korrekturterm. (3 Punkte)

**Aufgabe 3.2** *(Harmonische Oszillatoren)* **(10 Punkte)**

Die Energieniveaus eines Oszillators mit Frequenz $\nu$ sind gegeben durch

$$\epsilon = \frac{1}{2} h\nu, \dots, (n + \frac{1}{2}) h\nu, \dots$$

Ein System von $N$ Oszillatoren habe die Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2} N h\nu + M h\nu$$

(M ist ganzzahlig).

**(a)** Was ist die Gesamtzahl der möglichen Zustände $\Omega_M$ für gegebenes $E$ und festes $N$? (4 Punkte)

**(b)** Berechne die Entropie im mikrokanonischen Ensemble

$$S = k \ln \Omega_M$$

mit Hilfe der Stirling-Formel (für große $n$: $\ln(n!) \approx n \ln n - n$) für $N \gg 1, M \gg 1$ (3 Punkte)

**(c)** Die Temperatur $T$ ist definiert als

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$$

Drücke die Gesamtenergie als Funktion der Temperatur aus und diskutiere die Funktion $E(T)$. (4 Punkte)

**Aufgabe 3.3** *(Shannon-Entropie)* **(10 Punkte)**

**(a)** Beweise, dass die diskrete Gleichverteilung $p_n = \frac{1}{N}$ $(n = 1, \ldots, N)$ die Informationsentropie

$$I = -\sum_{n=1}^{N} p_n \log_2 p_n$$

maximiert. (6 Punkte)

**(b)** Gegeben seien zwei unabhängige eindimensionale Teilsysteme $A$ und $B$, deren Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben ist durch $p(x, y) = p_A(x)p_B(y)$. $x$ und $y$ seien die (kontinuierlichen) Mikrozustände des jeweiligen Teilsystems. Wie drückt sich die Gesamtinformationsentropie $I_{\text{ges}}$ des Systems durch die der Teilsysteme $A$ und $B$ aus? Welche wichtige Eigenschaft besitzt die Entropie also? (4 Punkte)