Theoretische Physik IV: Statistische Mechanik und Thermodynamik

5. Übungsblatt

Abgabedatum: Freitag, 23.5.08 in den Übungen

Aufgabe 5.1 *(Ideales Gas im großkanonischen Ensemble)* **(10 Punkte)**

Wir betrachten ein klassisches einatomiges ideales Gas ununterscheidbarer Teilchen der Masse m.

(a) Berechne die kanonische N-Teilchenzustandssumme Z_N. Schreibe Z_N als Funktion von V, N und λ. Dabei ist $\lambda := h\sqrt{\beta/(2\pi m)}$ die thermische de-Broglie Wellenlänge und $\beta = (k_B T)^{-1}$ (3 Punkte).

(b) Berechne die großkanonische Zustandssumme Z_{grk} und schreibe Sie als Funktion von V, λ und der Fugazität $z := e^{\beta\mu}$ und bestimme das großkanonische Potential $J = -k_B T \ln Z_{grk}$. (2 Punkte)

(c) Beweise, dass allgemein im großkanonischen Ensemble folgende Relation gilt:

$$\langle N \rangle = \beta^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_{grk}$$

(3 Punkte)

(d) Berechne die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$ für das ideale Gas. (2 Punkte)

Aufgabe 5.2 *(Extensive Größen)* **(10 Punkte)**

(a) Die Gibbs-Energie G (freie Enthalpie) ist für ein Einkomponentensystem mit variabler Teilchenzahl N gegeben durch $G = G(T, p, N)$ als eine Funktion der Temperatur, des Drucks und der Teilchenzahl. Benutze die Extensivität von G in der Variable N, um zu zeigen, dass das chemische Potential für dieses System gegeben ist durch $\mu = G/N$. (5 Punkte)

(b) Im Gegensatz zur Gibbs-Energie hängt die Entropie $S = S(E, V, N)$ von *drei* extensiven Größen ab. Benutze die Eigenschaft der Extensitivität, um folgende Relation zu zeigen

$$E = TS + \mu N - pV$$

(5 Punkte)

Aufgabe 5.3 *(Thermodynamische Relationen)* **(10 Punkte)**

Zeige für feste Teilchenzahl N:

(a) $\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_E = \frac{1}{C_V}\left(p - T\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V\right)$ (3 Punkte)

(b) $\left.\frac{\partial E}{\partial p}\right|_T = V\kappa_T\left(p - T\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V\right)$ (2 Punkte)

(c) $\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_S = \left.\frac{C_p}{\alpha V T}\right|_p$ (3 Punkte)

(d) $\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_S = \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_p$ (2 Punkte)

Hierbei ist $C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_V = T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V$ die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen, $C_p = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_p$ die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck, $\alpha = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p$ der Ausdehnungskoeffizient und $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T$ die isotherme Kompressibilität.

Bonusaufgabe 5.4 *(Energiefluktuationen im kanonischen Ensemble)* **(10 Extrapunkte)**
Hinweis: Diese Aufgabe kann freiwillig gelöst werden, um den Punktestand aufzubessern.

Wir wollen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Energiefluktuationen im kanonischen Ensemble betrachten. Die Momente der Fluktuationen sind definiert durch

$$\sigma_n = \frac{1}{Z} \sum_j \left(E_j - \epsilon\right)^n e^{-\beta E_j}$$

wobei $\beta = 1/k_B T$ und ϵ eine beliebige Energie ist und Z die kanonische Zustandssumme.

(a) Zeige dass

$$Z\sigma_n = (-1)^n e^{-\beta\epsilon} \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \left[Z e^{\beta\epsilon} \right]$$

(3 Punkte)

(b) Benutze das Ergebnis um zu zeigen, dass die Fluktuationen in einem idealen Gas normalverteilt sind um $\epsilon := \sigma_1$ (im thermodynamischen Limes), indem Du das Konvergenzverhalten der Momente σ_0 bis σ_8 untersuchst (Höhere Momente wollen wir hier der Einfachheit halber nicht betrachten).
Hinweis: Benutze ein Computeralgebra-Programm, um das Problem zu lösen! (7 Punkte)