

THEORETISCHE PHYSIK IV: STATISTISCHE MECHANIK UND THERMODYNAMIK

8. Übungsblatt

Abgabedatum: Freitag, 20.6.08 in den Übungen

Aufgabe 8.1 (*Magnetisierung eines Paramagneten*)**(10 Punkte)**

Die Energie E von N Spins \mathbf{s}_n in einem Magnetfeld \mathbf{H} ist durch

$$E = -\mu \sum_{n=1}^N \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}_n$$

gegeben. Berechne die freie Energie $F = -k_B T \ln Z$ und Magnetisierung $M = -\left. \frac{\partial F}{\partial H} \right|_T$

- (a) für *Isingspins*, d.h. $s_n = \pm 1$ mit nur zwei Orientierungen bezüglich des Magnetfelds, entweder parallel oder antiparallel zu H . (4 Punkte)
- (b) für *Heisenbergspins*, d.h. $\mathbf{s}_n = (s_x, s_y, s_z)_n$ sind dreidimensionale Vektoren der Länge $\|\mathbf{s}_n\| = 1$. (6 Punkte)

Aufgabe 8.2 (*Pottsmodell*)**(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe wollen wir ein weiteres oft benutztes und sehr allgemeines Modellssystem untersuchen: Das Pottsmodell. Dazu betrachten wir N Teilchen, welche in einer Reihe angeordnet sind. Wir identifizieren das Teilchen 1 mit dem Teilchen $N+1$. Jedes Teilchen kann p verschiedene Zustände annehmen, welche durch $\nu = 1, \dots, p$ indiziert seien. Die Wechselwirkungsenergie benachbarter Teilchen sei $-J < 0$, wenn beide Teilchen im selben Zustand sind, sonst 0. Die Hamiltonfunktion des Systems ist

$$H(\nu_1, \dots, \nu_N) = -J \sum_{j=1}^N \delta_{\nu_j, \nu_{j+1}}$$

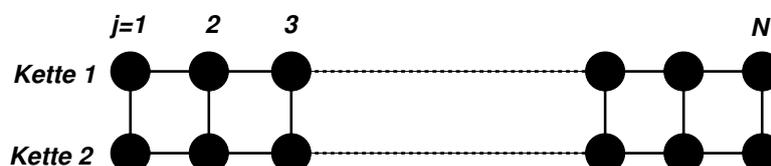
- (a) Bestimme die kanonische Zustandssumme des Systems mit Hilfe der Transfermatrix. (6 Punkte)
- (b) Berechne die innere Energie $U(T)$ pro Teilchen im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$. (3 Punkte)
- (c) Diskutiere das Hoch- und Niedrigtemperaturverhalten der inneren Energie des Systems. (1 Punkt)

Aufgabe 8.3 (*Isingstreifen*)**(10 Punkte)**

Betrachte zwei eindimensionale, ferromagnetische geschlossene Isingketten der Länge N , die parallel zueinander angeordnet und gekoppelt sind (siehe Abbildung). Wir betrachten folgenden Hamiltonian

$$H(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N) = -J_1 \sum_{j=1}^N (s_{j,1} s_{j+1,1} + s_{j,2} s_{j+1,2}) - J_2 \sum_{j=1}^N s_{j,1} s_{j,2}, \quad J_1 > 0, J_2 > 0$$

Hier bezeichnet $\mathbf{s}_j = (s_{j,1}, s_{j,2}) \in \{+1, -1\}^2$ den zweidimensionalen Vektor der j -ten Spins der ersten und zweiten Kette. Wir setzen wieder $\mathbf{s}_{N+1} = \mathbf{s}_1$.



(a) Zeige, dass die kanonische Zustandssumme geschrieben werden kann als

$$Z_N = \text{Tr } T^N$$

wobei $T \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ eine geeignete Transfermatrix des Systems darstellt. (8 Punkte)

(b) Bestimme die freie Energie F pro Teilchen im thermodynamischen Limes $N \rightarrow \infty$ (2 Punkte)

Hinweis: Es ist hilfreich, ein Computeralgebra-Programm zur Bestimmung der Eigenwerte von T zu benutzen!